

Comptes rendus
hebdomadaires des
séances de l'Académie
des sciences / publiés...
par MM. les secrétaires
perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

sommet P_{R_1} . Sur OX on trouve Q_{R_1} et q_{R_1} . On doit donc mener par $M_1(\Delta x, \Psi_1)$ le segment de projection Δx sur OX , parallèle à q_{R_1} . On arrive ainsi au point $M_2(2\Delta x, \Psi_2)$. De même par $N_1(\Delta x, \Psi'_1)$ on mènera un segment parallèle à q'_{S_1} , et l'on aura le point $N_2(2\Delta x, \Psi'_2)$, etc. Ainsi on trace, par des segments successifs, la courbe intégrale, passant par M_0 , et la courbe représentant sa dérivée, passant par N_0 . Évidemment, si Δx est choisi plus petit, la courbe dessinée sera plus exacte.

Il est clair, d'après les raisonnements précédents que les mêmes considérations peuvent être données pour l'équation linéaire, dont le terme en $d\Psi/dx$ n'est pas nul. Si l'on a une équation linéaire ordinaire d'ordre n , on doit écrire aussi la formule (2) et $(n-2)$ formules comme (3). On peut donc, comme plus haut, tracer son intégrale et ses dérivées $\Psi^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots, n$) avec les conditions initiales $\Psi^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) données. Les mêmes considérations seront valables pour une équation, linéaire par rapport aux dérivées de Ψ , si le coefficient de $(d^r \Psi)/(dx)^r$ est de la forme $f_r(x) \varphi_r(x)$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les coefficients mendéliens d'hérédité.*

Note (1) de M. V. A. KOSTITZIN, présentée par M. Paul Montel.

Les équations différentielles générales du problème de la sélection naturelle (1) contiennent deux systèmes de coefficients d'origine statique : probabilités de croisements ω_{hk} et coefficients d'hérédité λ_{hk}^i exprimant la répartition des produits d'un croisement (femelle $p_h \times$ mâle p_k) entre les races pures ou hybrides composant une population (p_1, p_2, \dots, p_n) :

$$(1) \quad \text{Produits } (p_h \times p_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_{hk}^i (p_i).$$

Nous allons étudier ces coefficients dans le cas mendélien, en supposant que les caractères distinctifs des races ne soient pas liés aux chromosomes sexuels. Cette hypothèse s'exprime numériquement par la symétrie des coefficients d'hérédité

$$(2) \quad \lambda_{hk}^i = \lambda_{kh}^i; \quad (p_h \times p_k) = (p_k \times p_h)$$

(1) Séance du 14 mars 1938.

(1) *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 570-572.

et permet de ne pas subdiviser les groupes raciaux en sous-groupes sexuels.

1. *Structure cellulaire.* — Soit donc (p_1, p_2, \dots, p_n) une population composée initialement de représentants de deux ou plusieurs races de la même espèce et contenant au bout de quelques générations toutes les races que peuvent donner les croisements $(p_h \times p_k)$.

Admettons, d'après la théorie chromosomique de l'hérédité, qu'avant sa maturation une cellule sexuelle contienne deux jeux de chromosomes-porteurs des caractères. Considérons un caractère x (un couple de caractères d'après la terminologie habituelle) qui peut se présenter tantôt sous forme A , tantôt sous celle a et qui est localisé dans un des chromosomes non sexuels. Comme, dans la cellule, ce caractère est porté par deux chromosomes, trois combinaisons sont possibles : il peut arriver que dans les deux chromosomes le caractère x figure sous forme A ; dans ce cas, par rapport à x , la cellule sera *homozygote du type* $\varepsilon_1 = (A, A)$; dans le cas où x figure sous forme a , la cellule sera homozygote du type $\varepsilon_2 = (a, a)$; enfin, dans le cas mixte, la cellule sera hétérozygote du type $\varepsilon_3 = (A, a)$.

On peut donc caractériser la structure chromosomique d'une cellule sexuelle avant ses divisions réductionnelles par le symbole

$$(3) \quad E = (\varepsilon_1^1, \varepsilon_2^2, \varepsilon_3^3, \dots, \varepsilon_m^m),$$

les indices supérieurs donnant le numérotage des caractères et les indices inférieurs, égaux soit à 1, soit à 2, soit à 3, indiquant l'aspect de ces caractères.

2. *Divisions de maturation et combinaisons ultérieures.* — Dans ces divisions, la cellule perd au hasard la moitié de ses chromosomes en n'en conservant qu'un de chaque type. Le croisement, en combinant les cellules réduites, reconstitue des cellules à deux jeux de chromosomes. On peut exprimer cette opération et ses résultats par les relations symboliques suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 \times \varepsilon_1 = (\varepsilon_1); & \varepsilon_2 \times \varepsilon_2 = (\varepsilon_2); & \varepsilon_3 \times \varepsilon_3 = \frac{1}{4}(\varepsilon_1) + \frac{1}{4}(\varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_3); \\ \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 = (\varepsilon_3); & \varepsilon_1 \times \varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1) + \frac{1}{2}(\varepsilon_3); & \varepsilon_2 \times \varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_3). \end{cases}$$

Ces relations expriment les lois de Mendel et donnent la répartition probable des produits de tous les croisements dans le cas le plus simple d'un caractère. Dans le cas de $m > 1$, cet algorithme doit être appliqué indépendamment à chaque caractère avec multiplication symbolique et groupement ultérieur des termes. Pour en donner une idée, considérons le cas de structures ne différant que par deux caractères indépendants. Le

nombre total des races sera neuf, dont quatre races homozygotes

$$(5) \quad p_1 = (\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2), \quad p_2 = (\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2), \quad p_3 = (\varepsilon_1^1, \varepsilon_2^2), \quad p_4 = (\varepsilon_2^1, \varepsilon_1^2),$$

quatre races simplement hétérozygotes

$$(6) \quad p_5 = (\varepsilon_1^1, \varepsilon_3^2), \quad p_6 = (\varepsilon_3^1, \varepsilon_1^2), \quad p_7 = (\varepsilon_3^1, \varepsilon_2^2), \quad p_8 = (\varepsilon_2^1, \varepsilon_3^2),$$

et une seule race doublement hétérozygote

$$(7) \quad p_9 = (\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2),$$

l'hétérogénéité étant mesurée par le nombre des symboles ε_3 figurant dans la formule d'une race. Pour calculer le résultat d'un croisement, il suffit d'une suite d'opérations symboliques très simples avec application des formules (1) et (4). On a, par exemple,

$$p_1 p_3 = (\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2) \times (\varepsilon_1^1, \varepsilon_2^2) = (\varepsilon_1^1 \times \varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2 \times \varepsilon_2^2) = (\varepsilon_1^1, \varepsilon_3^2) = p_5,$$

ce qui donne, par conséquent,

$$\lambda_{13}^5 = 1, \quad \lambda_{13}^i = 0 \quad (i \neq 5).$$

Dans le cas un peu plus compliqué

$$\begin{aligned} p_3 p_9 &= (\varepsilon_1^1, \varepsilon_3^2) \times (\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2) = (\varepsilon_1^1 \times \varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2 \times \varepsilon_3^2) = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1^1 + \frac{1}{2} \varepsilon_3^1, \frac{1}{4} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_3^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_3^2 \right) \\ &= \frac{1}{8} (\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2) + \frac{1}{8} (\varepsilon_1^1, \varepsilon_3^2) + \frac{1}{4} (\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2) + \frac{1}{8} (\varepsilon_3^1, \varepsilon_1^2) + \frac{1}{8} (\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2) + \frac{1}{4} (\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2) \\ &= \frac{1}{8} p_1 + \frac{1}{8} p_3 + \frac{1}{4} p_5 + \frac{1}{8} p_6 + \frac{1}{8} p_7 + \frac{1}{4} p_9. \end{aligned}$$

on trouve

$$\lambda_{39}^1 = \lambda_{39}^3 = \lambda_{39}^5 = \lambda_{39}^7 = \frac{1}{8}; \quad \lambda_{39}^6 = \lambda_{39}^9 = \frac{1}{4}; \quad \lambda_{39}^2 = \lambda_{39}^4 = \lambda_{39}^8 = 0.$$

SYSTEMES DE PFAFF. — Interprétation géométrique dans les variétés non holonomes des théories d'intégration des systèmes d'équations de Pfaff.
Note (1) de M^{me} CHRISTIANE PAUC, présentée par M. Élie Cartan.

La *projectivité de calotte*, dont l'importance relativement à la géométrie d'une variété non holonome V_n^{n-1} fut si bien mise en relief par M. Bompiani (*Accademia dei Lincei*, séance du 6 février 1938), n'est autre qu'une *corrélation* (2) du plan tangent à la variété en lui-même. La V_n^{n-1} étant définie dans un espace cartésien vectoriel à n coordonnées par l'équation

(1) Séance du 14 mars 1938.

(2) Les dénominations géométriques sont empruntées à E. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, cap. 5, Principato, Messina, 1923.