Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

sommet P_{R_1}. Sur OX on trouve Q_{R_1} et q_{R_1}. On doit donc mener par $M_1(\Delta x, \Psi_1)$ le segment de projection Δx sur OX, parallèle à q_{R_1}. On arrive ainsi au point $M_2(2\Delta x, \Psi_2)$. De même par $N_1(\Delta x, \Psi'_1)$ on mènera un segment parallèle à q'_{S_1}, et l'on aura le point $N_2(2\Delta x, \Psi'_2)$, etc. Ainsi on trace, par des segments successifs, la courbe intégrale, passant par M_0, et la courbe représentant sa dérivée, passant par N_0. Évidemment, si Δx est choisi plus petit, la courbe dessinée sera plus exacte.

Il est clair, d'après les raisonnements précédents que les mêmes considérations peuvent être données pour l'équation linéaire, dont le terme en $d\Psi/dx$ n'est pas nul. Si l'on a une équation linéaire ordinaire d'ordre n, on doit écrire aussi la formule (2) et $(n-2)$ formules comme (3). On peut donc, comme plus haut, tracer son intégrale et ses dérivées $\Psi^{(r)}(r=1, 2, \ldots, n)$ avec les conditions initiales $\Psi^{(r)}(r=0, 1, \ldots, n)$ données. Les mêmes considérations seront valables pour une équation, linéaire par rapport aux dérivées de Ψ, si le coefficient de $(d^r\Psi)/(dx)^r$ est de la forme $f_r(x)\,\varphi_r(x)$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les coefficients mendeliens d'hérédité.* Note [1] de M. V. A. **Kostitzin**, présentée par M. Paul Montel.

Les équations différentielles générales du problème de la sélection naturelle [2] contiennent deux systèmes de coefficients d'origine statique : probabilités de croisements ω_{hk} et coefficients d'hérédité λ^i_{hk} exprimant la répartition des produits d'un croisement (femelle $p_h \times$ mâle p_k) entre les races pures ou hybrides composant une population $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$:

$$\text{Produits } (p_h \times p_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i_{hk}(p_i). \tag{1}$$

Nous allons étudier ces coefficients dans le cas mendelien, en supposant que les caractères distinctifs des races ne soient pas liés aux chromosomes sexuels. Cette hypothèse s'exprime numériquement par la symétrie des coefficients d'hérédité

$$\lambda^i_{hk} = \lambda^i_{kh}; \qquad (p_h \times p_k) = (p_k \times p_h) \tag{2}$$

---

[1] Séance du 14 mars 1938.

[2] *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 570-572.

et permet de ne pas subdiviser les groupes raciaux en sous-groupes sexuels.

1. *Structure cellulaire.* — Soit donc $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ une population composée initialement de représentants de deux ou plusieurs races de la même espèce et contenant au bout de quelques générations toutes les races que peuvent donner les croisements $(p_h \times p_k)$.

Admettons, d'après la théorie chromosomique de l'hérédité, qu'avant sa maturation une cellule sexuelle contienne deux jeux de chromosomes-porteurs des caractères. Considérons un caractère α (un couple de caractères d'après la terminologie habituelle) qui peut se présenter tantôt sous forme A, tantôt sous celle a et qui est localisé dans un des chromosomes non sexuels. Comme, dans la cellule, ce caractère est porté par deux chromosomes, trois combinaisons sont possibles : il peut arriver que dans les deux chromosomes le caractère α figure sous forme A ; dans ce cas, par rapport à α, la cellule sera *homozygote du type* $\varepsilon_1 = (A, A)$; dans le cas où α figure sous forme a, la cellule sera homozygote du type $\varepsilon_2 = (a, a)$; enfin, dans le cas mixte, la cellule sera hétérozygote du type $\varepsilon_3 = (A, a)$.

On peut donc caractériser la structure chromosomique d'une cellule sexuelle avant ses divisions réductionnelles par le symbole

$$\mathrm{E} = (\varepsilon^1_{i_1}, \varepsilon^2_{i_2}, \varepsilon^3_{i_3}, \ldots, \varepsilon^m_{i_m}), \tag{3}$$

les indices supérieurs donnant le numérotage des caractères et les indices inférieurs, égaux soit à 1, soit à 2, soit à 3, indiquant l'aspect de ces caractères.

2. *Divisions de maturation et combinaisons ultérieures.* — Dans ces divisions, la cellule perd au hasard la moitié de ses chromosomes en n'en conservant qu'un de chaque type. Le croisement, en combinant les cellules réduites, reconstitue des cellules à deux jeux de chromosomes. On peut exprimer cette opération et ses résultats par les relations symboliques suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} \varepsilon_1 \times \varepsilon_1 = (\varepsilon_1); & \varepsilon_2 \times \varepsilon_2 = (\varepsilon_2); & \varepsilon_3 \times \varepsilon_3 = \frac{1}{4}(\varepsilon_1) + \frac{1}{4}(\varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_3); \\ \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 = (\varepsilon_3); & \varepsilon_1 \times \varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1) + \frac{1}{2}(\varepsilon_3); & \varepsilon_2 \times \varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_3). \end{array}\right. \tag{4}$$

Ces relations expriment les lois de Mendel et donnent la répartition probable des produits de tous les croisements dans le cas le plus simple d'un caractère. Dans le cas de $m > 1$, cet algorithme doit être appliqué indépendamment à chaque caractère avec multiplication symbolique et groupement ultérieur des termes. Pour en donner une idée, considérons le cas de structures ne différant que par deux caractères indépendants. Le nombre total des races sera neuf, dont quatre races homozygotes

$$(5)\qquad p_1=(\varepsilon_1^1,\ \varepsilon_1^2),\qquad p_2=(\varepsilon_2^1,\ \varepsilon_2^2),\qquad p_3=(\varepsilon_1^1,\ \varepsilon_2^2),\qquad p_4=(\varepsilon_2^1,\ \varepsilon_1^2),$$

quatre races simplement hétérozygotes

$$(6)\qquad p_5=(\varepsilon_1^1,\ \varepsilon_3^2),\qquad p_6=(\varepsilon_3^1,\ \varepsilon_1^2),\qquad p_7=(\varepsilon_3^1,\ \varepsilon_2^2),\qquad p_8=(\varepsilon_2^1,\ \varepsilon_3^2),$$

et une seule race doublement hétérozygote

$$(7)\qquad p_9=(\varepsilon_3^1,\ \varepsilon_3^2),$$

l'hétérogénéité étant mesurée par le nombre des symboles ε_3 figurant dans la formule d'une race. Pour calculer le résultat d'un croisement, il suffit d'une suite d'opérations symboliques très simples avec application des formules (1) et (4). On a, par exemple,

$$p_1 p_3=(\varepsilon_1^1,\ \varepsilon_1^2)\times(\varepsilon_1^1,\ \varepsilon_2^2)=(\varepsilon_1^1\times\varepsilon_1^1,\ \varepsilon_1^2\times\varepsilon_2^2)=(\varepsilon_1^1,\ \varepsilon_3^2)=p_5,$$

ce qui donne, par conséquent,

$$\lambda_{13}^5=1,\qquad \lambda_{13}^i=0\qquad (i\neq 5).$$

Dans le cas un peu plus compliqué

$$\begin{aligned}p_5 p_9&=(\varepsilon_1^1,\varepsilon_3^2)\times(\varepsilon_3^1,\varepsilon_3^2)=(\varepsilon_1^1\times\varepsilon_3^1,\varepsilon_3^2\times\varepsilon_3^2)=\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1^1+\frac{1}{2}\varepsilon_3^1,\ \frac{1}{4}\varepsilon_1^2+\frac{1}{4}\varepsilon_2^2+\frac{1}{2}\varepsilon_3^2\right)\\&=\frac{1}{8}(\varepsilon_1^1,\ \varepsilon_1^2)+\frac{1}{8}(\varepsilon_1^1,\ \varepsilon_2^2)+\frac{1}{4}(\varepsilon_1^1,\ \varepsilon_3^2)+\frac{1}{8}(\varepsilon_3^1,\ \varepsilon_1^2)+\frac{1}{8}(\varepsilon_3^1,\ \varepsilon_2^2)+\frac{1}{4}(\varepsilon_3^1,\ \varepsilon_3^2)\\&=\frac{1}{8}p_1+\frac{1}{8}p_3+\frac{1}{4}p_5+\frac{1}{8}p_6+\frac{1}{8}p_7+\frac{1}{4}p_9,\end{aligned}$$

on trouve

$$\lambda_{59}^1=\lambda_{59}^3=\lambda_{59}^6=\lambda_{59}^7=\frac{1}{8};\qquad \lambda_{59}^5=\lambda_{59}^9=\frac{1}{4};\qquad \lambda_{59}^2=\lambda_{59}^4=\lambda_{59}^8=0.$$

SYSTÈMES DE PFAFF. — *Interprétation géométrique dans les variétés non holonomes des théories d'intégration des systèmes d'équations de Pfaff.* Note (1) de Mme **Christiane Pauc**, présentée par M. Élie Cartan.

La *projectivité de calotte*, dont l'importance relativement à la géométrie d'une variété non holonome V_n^{n-1} fut si bien mise en relief par M. Bompiani (*Académie dei Lincei*, séance du 6 février 1938), n'est autre qu'une *corrélation* (2) du plan tangent à la variété en lui-même. La V_n^{n-1} étant définie dans un espace cartésien vectoriel à n coordonnées par l'équation

(1) Séance du 14 mars 1938.

(2) Les dénominations géométriques sont empruntées à E. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, cap. 5, Principalo, Messina, 1923.